Πρόταση

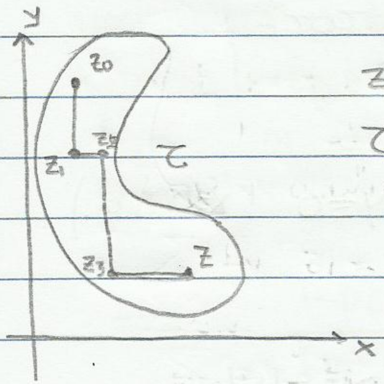
Εαν $f'(z)=0$, $\forall z \in \mathcal{T} \Leftrightarrow f$ σταθερη

Αποδ

αφου $f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f_x(x_0+iy_0)=u_x(x_0,y_0)+i v_x(x_0,y_0)=$

$=-i f_y=-i\left(u_y(x_0,y_0)\right)+i v_y(x_0,y_0)=0$

Τοτε : $u_x=u_y=0$ και $v_x=v_y=0$



$z_1=x_0+iy_1$

Το ΘΜΤ ολοκληρωτικου λογισμου λεει:

$u(x_0,y_1)=u(x_0,y_0)+\cancel{\int_{y_0}^{y_1}u_y(x_0,s)\,ds}^{\,0}$

ομοια και για τα αλλα διαστηματα

καταληγουμε $f(z)=f(z_0)=\sigma\tau\alpha\theta$

Το αντιστροφο ειναι φανερο

Πχ

Για να βρουμε την παραγωγο της συναρτησης:

$f(z)=z^v$, $v\geq 1$

Παιρνουμε το πηλικο των διαφορων

$$\frac{z^v-z_0^v}{z-z_0}=z^{v-1}+z z_0^{v-1}+\dots+z_0^{v-1}\xrightarrow{z\to z_0} v z_0^{v-1}$$

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ & ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- Εστω $f_0, f_1, \ldots, f_\nu, \ldots$ ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων στον τ οπου $z_0 \in \tau$ και $\underbrace{f_\nu(z_0)}_{a_\nu} \in \mathbb{C}$ τοτε

- $a_\nu \to \alpha \in \mathbb{C}$: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0)\ \nu \geq \nu_0 \Rightarrow a_\nu \in B(a,\varepsilon) \Rightarrow |a_\nu - a| < \varepsilon$
- Εαν τωρα ισχυει $\left[\forall z_0 \in \mathbb{C} : \exists \lim_\nu f_\nu(z) = f(z_0)\right] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[(\forall z_0 \in \tau)(\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0)\ \nu_0 \geq \nu \Rightarrow |f_\nu(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon\right.$ τοτε λεμε οτι $f_\nu \to f$ κατά σημειο
- Εαν τωρα ισχυει $(\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0)(\forall z_0 \in \tau)\ \nu \geq \nu_0 \Rightarrow |f_\nu(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$
$\Rightarrow f_\nu \longrightarrow f$ ομοιόμορφα.

Να ποσημε οτι αν $f_\nu \xrightarrow{\text{σημ.}} f \not\Rightarrow f_\nu \xrightarrow{\text{ομ.}} f$

ΠΧ

$f_\nu(z) = |z|^\nu$, $|z|<1$

$|z_0|^\nu = |z_0^\nu| \to 0$ διοτι $\varepsilon>0$ $|z_0|^\nu < \varepsilon \Rightarrow \nu \log|z_0| < \log\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \nu > \dfrac{\overset{<0}{\log\varepsilon}}{\underset{<0}{\log|z_0|}} > 0$ (και αντιστροφα)

Αρα, η $f(z) = |z|^\nu$ συγκλινει προς το 0 κατά σημειο
Τωρα για να συγκλινει ομοιόμορφα πρεπει να ισχυει $\nu > \dfrac{\log\varepsilon}{\log|z_0|}$ ομοιόμορφα για ολα τα ν. Αυτό ομως δεν ισχύει διοτι το $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon, z_0)$ αλλά έμεις θα θελαμε $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ και μάλιστα όταν το $|z_0| \to 1$ τοτε $\log|z_0| \to 0$ αρα $\dfrac{\log\varepsilon}{\log|z_0|} \to -\infty$
Αρα, δεν ισχυει η ομοιομορφη συγκλιση
Εαν όμως πάρουμε ένα συμπαγες υποσυνολο της σφαιρικής περιοχής $|z_0|^\nu < \varepsilon$ τοτε η συγκλιση ομοιομορφης

- Εστω η ακολουθία συναρτησεων $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots : \tau \to \mathbb{C}$, τοτε $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ καλείται σειρά των συναρτήσεων $f_0, f_1, \ldots, f_\nu, \ldots$ οπου $S_\nu = f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_\nu(z)$ (ακολουθια μερικ. αθροισμ.)
S_ν συγκλινει κατά σημείο (αντ. ομοιομ.) αν $\sum^{\infty} f_\nu$ συγκλινει

κατά σημείο (αντ. ομοιόμορφα)
Επίσης όπως ο χώρος $\mathbb{C}$ πλήρης έστω κάθε βασική ακολουθία είναι και συγκλίνουσα. Τότε, αν S_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ βασική τότε θα συγκλίνει.

Άρα, η σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ συγκλίνει κατά σημείο όταν
$(\forall z \in \Sigma)(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \nu_0 \Longrightarrow |S_{n+k}(z)-S_n(z)|<\varepsilon$
Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:
για ν, μ εν $\mathbb{N}$ τότε $(\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0)(\nu,\mu>\nu_0) \Rightarrow |S_\nu(z)-S_\mu(z)|<\varepsilon$
για $\nu>\mu$ (άρα $\mu=\nu+k$)
$|S_\nu(z)-S_{\nu+k}(z)| = |f_0(z)+\dots+f_\nu(z)-(f_0(z)+\dots+f_{\nu+1}(z)+\dots+f_{\nu+k}(z)| =$
$= |f_{\nu+1}(z)+f_{\nu+2}(z)+\dots+f_{\nu+k}(z)|$
Άρα, $(\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0)(\forall \nu \geq \nu_0)(\forall k\geq 1)\ |\sum_{j=1}^{k} f_{k+j}(z)|<\varepsilon$
(Κριτήριο Cauchy)

Κριτήριο σύγκρισης
Εάν $|f_\nu(z)| \leq M_\nu$ $\forall z$ (ομοιόμορφα) & $\sum M_\nu < \infty$ τότε
$\sum f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα
Απόδ.
$$\left|\sum_{j=1}^{k} f_{\nu+j}(z)\right| \leq \sum_{j=1}^{k} |f_{\nu+j}(z)| \leq \sum_{j=1}^{k} M_{\nu+j} < \varepsilon$$

Πχ
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z) = 1+z+\dots+z^\nu+\dots, \quad |z|<1$$
$$S_\nu(z) = 1+z+\dots+z^\nu = \frac{1-z^{\nu+1}}{1-z} \xrightarrow{\nu\to\infty} \frac{1}{1-z}$$
Άρα, $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z) = \frac{1}{1-z}$ (κατά σημείο)

Θα εξετάσουμε αν συγκλίνει ομοιόμορφα $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ S_ν συγκλ. ομοιόμορφα
όπου είδαμε πριν ότι δεν συγκλίνει ομοιόμορφα

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$$

καλείται δυναμοσειρά κέντρου a με συντελεστές

$a_0, a_1, a_2, \dots$

Εάν $z-a=w \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^\nu$ ①

Θα βρούμε εκείνα τα z που η σειρά ① συγκλίνει.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ συγκλίνει στο δίσκο $B(a,R)$ του μιγαδικού επιπέδου κέντρου a και ακτίνας R που λέγεται ακτίνα σύγκλισης δηλ. η ποσότητα

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n'|}}, & \text{αν } \limsup \sqrt[n]{|a_n'|} > 0 \\ +\infty, & \text{αν } \limsup \sqrt[n]{|a_n'|} = 0 \end{cases} \quad \text{με } a_n' = a_n(z-a)^n$$

Αποδ

Έστω $\limsup \sqrt[n]{|a_n'|} =: L \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$

Τότε παίρνουμε:

$\sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|z-a|$

$|z-a| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$

τότε $|z-a| < \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = R$

Στην απόδειξη στηρίζεται το κρ. ν-οστής ρίζας του Cauchy

δηλ. έχω ένα δίσκο όπου η σειρά συγκλίνει
αν το z έξω από το δίσκο τότε $L > R$
και άρα δεν συγκλίνει και το $R = +\infty$
Τέλος, αν βρίσκεται στο σύνορο του κύκλου τότε
από κρ. ν-οστής ρίζας Cauchy δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Πχ 1

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \quad , \quad |z|=1$$

Βλέπουμε πως πάνω στο σύνορο του δίσκου για $z=1$ τότε $1+1+\dots+1+\dots \to \infty$, για $z=-1$ τότε $1-1+1-1+1-1+\dots$ δεν γνωρίζουμε,
για $z=i$ τότε $i+i^2+i^3+\dots \to \frac{1}{1-i}$
για $z=-i$ τότε $-i+i^2-i^3+i^4-\dots$ δεν γνωρίζουμε

Πχ 2

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} z^{\nu}$$

$$\sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu+1}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu+1}} \to 1 = R$$

Διότι

έχουμε $\sqrt[\nu]{\nu+1} = (\nu+1)^{1/\nu} = \left((\nu+1)^{1/(\nu+1)}\right)^{\frac{\nu+1}{\nu}}$

όπου $\sqrt[\nu]{\nu} = (1+\theta_\nu)^2 \Rightarrow \sqrt{\nu} = (1+\theta_\nu)^{\nu} \geq 1+\nu\theta_\nu \Rightarrow \theta_\nu \leq \frac{\sqrt{\nu}-1}{\nu}$

όπου $\frac{\sqrt{\nu}-1}{\nu} \to 0$

Τουτέστιν το $\sqrt[\nu]{\nu+1} \to 1$

Πχ 3

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^{\nu} z^{\nu}$$

$$\sqrt[\nu]{\nu^{\nu}} = \nu \to \infty \quad \leadsto \quad R=0$$

Η σειρά συγκλίνει μόνο για το σημείο 0